**4. Кубический сплайн. Построение. Экстремальное свойство.**

Пусть некоторая функция *f(x)* задана на отрезке [A; B], разбитом на части , . [Кубическим](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1_%28%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%29) [сплайном](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BD) называется [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) , которая:

* на каждом отрезке является [многочленом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD) степени не выше третьей;
* имеет непрерывные первую и вторую [производные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) на всём отрезке [A;B];
* в точках выполняется равенство , т.е. сплайн [интерполирует](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F) функцию *f(x)* в точках ( i=1, 2, …, N) – условие интерполяции.

Для однозначного задания сплайна перечисленных условий недостаточно, для построения сплайна необходимо наложить дополнительные требования – краевые условия:

**1-го типа.** Если известно точное значение первой производной на обеих границах, то такой сплайн называют фундаментальным. *S'(A)=f’(A)*, *S'(B)=f’(B).*

**2-го типа.** *S''(A)= f''(A)*, *S''(B)= f''(В)*. На концах промежутка задаются значения второй производной искомой функции.

**3-го типа.** *S'(A)= S'(B) и S''(A)=* *S''(B).* Периодические – выполнение этих условий естественно требовать в тех случаях, когда интерполируемая функция является периодической с периодом Т=А-В.

**4-го типа.** , . Во внутренних узлах сетки третья производная функции S(x), вообще говоря, разрывна. Однако число разрывов третьей производной можно уменьшить при помощи данного условия. В этом случае построенный сплайн будет трижды непрерывно дифференцируем на промежутках [] и [,].

***Теорема***: Для любой функции *f(x)* и любого разбиения отрезка [A; B] существует ровно один естественный сплайн *S(x)*, удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Принцип построения и будет являться доказательством данной теоремы.

Коэффициенты на каждом интервале определяются из условий сопряжения в узлах:

Кроме того, на границе при*x=x0*и  *x=xn*  ставятся условия

Будем искать кубический полином в виде

Из условия  *fi=yi*  имеем

Вычислим производные:

и потребуем их непрерывности при *x=xi*:

Общее число неизвестных коэффициентов, очевидно, равно *4n*, число уравнений равно *4n-2*. Недостающие два уравнения получаем из условия ограничений при *x=x0* и *x=xn*:

Выражение , подставляя это выражение и исключая , получим

Подставив теперь выражения для*bi*, *di+1*и *di* в первую формулу, после несложных преобразований получаем для определения *ci*разностное уравнение второго порядка

С краевыми условиями

Матрица этой системы 3-х диагональная. Такие системы экономно решаются методом прогонки.

В силу диагонального преобладания система имеет единственное решение.

После нахождения сi определяются ai, bi и di и определяется вид кубических многочленов (сплайнов) на каждом отрезке.

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн.

**Экстремальное свойство.**

Пусть сплайн S(t) интерполирует функцию f(t) на системе узлов

Тогда S(t) с краевыми условиями *S''(A)= S''(В)=0* доставляет минимум функционалу

Среди всех функций f(t), принадлежащих классу функций из пространства С2[a,b], проходящих через точки массива (xi,yi), i=0, 1,…, m, именно кубический сплайн S(x), удовлетворяющий вышеуказанным краевым условиям доставляет экстремум (минимум) функционалу .

Интерполяционный кубический сплайн обладает описанным выше экстремальным свойством на очень широком классе функций, а именно на классе − класс функций суммируемых вместе со второй производной.